



1952

NOUVELLE MÉTHODE
DE
NIVELLEMENT
TRIGONOMÉTRIQUE.

NOUVELLE MÉTHODE
DE
NIVELLEMENT
TRIGONOMÉTRIQUE.

PAR M. DE PRONY,

CHEVALIER DE L'ORDRE DU ROI, OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, MEMBRE DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE PARIS, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES, ETC.,
INSPECTEUR GÉNÉRAL ET DIRECTEUR DE L'ÉCOLE ROYALE DES PONTS ET CHAUSSEES.



A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,
IMPRIMEURS DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.

1822.



NOUVELLE MÉTHODE

DE

NIVELLEMENT TRIGONOMÉTRIQUE.

§ 1^{er}.



Utilité de la méthode, instruments dont son usage exige l'emploi.

(1) J'AI conçu l'idée de la méthode que je vais exposer, pendant mon séjour en Italie (*), où elle m'a été fort utile pour les projets que j'avais à faire, dans les plaines du Pô, dans les marais pontins, etc., en me procurant les moyens de niveler et de relever des points situés sur des lignes que les localités ne permettaient pas de parcourir. L'observateur, qui fait usage de cette méthode, a le grand avantage d'observer dans un lieu abrité, où il peut même établir son logement : d'atténuer ainsi, considérablement, sur un sol insalubre, l'influence du mauvais air, et d'assurer l'exactitude de ses opérations, par la permanence et la commodité de sa position ;

(*) J'ai donné un précis de cette Méthode dans mon ouvrage sur les *Marais Pontins*.

il a, de plus, la faculté de se servir d'instruments qu'il lui serait difficile ou impossible de transporter, de station en station, sur le terrain, et dont la précision est bien supérieure à celle des instruments portatifs.

Le travail, à exécuter en rase campagne, se réduit à des mesurcs de lignes droites et à des placements de mires; on trouvera partout des hommes acclimatés propres à ce travail.

(2) L'ingénieur, placé à la station fixe, devra être pourvu d'un bon *cercle répéteur*, relevant les angles dans le plan des objets, et mesurant les angles de dépression et d'élévation, ou d'un excellent cercle azimuthal donnant, immédiatement, les angles horizontaux, et portant un cercle vertical pour les distances au zénith. On fait à Paris de ces théodolites perfectionnés, qui répètent les angles verticaux comme les horizontaux, et qui sont bien préférables aux théodolites ordinaires avec lesquels on n'a que les angles simples.

Ceux qui opéreront dans la campagne auront des chaînes en fer bien étalonnées, des fiches de fer, des jalons et des mires.

Ces mires sont des planchettes carrées qui peuvent couler le long de jalons ferrés et bien droits, et se fixer par des vis de pression à différentes distances des sommets de ces jalons. Sur chacune de ces planchettes sont peints à l'huile deux cercles concentriques, l'extérieur en rouge, et l'intérieur, d'un diamètre beaucoup plus petit, en blanc. Le centre commun de ces cercles, que j'appelle centre de la mire, est placé au centre de figure de la planchette, et le plan passant par ce centre et par l'axe du jalon doit être perpendiculaire au plan des cercles concentriques.

(3)

Lorsque le jalon est planté, son axe doit être bien vertical, et le plan de la mire tourné de manière qu'il soit perpendiculaire au plan vertical passant par le centre de l'instrument et par l'axe du jalon.

§ II.

Exposition de la méthode.

(3) Soient, fig. 1, des points, en nombre quelconque $A, A', A'', A''',$ etc., situés sur le terrain, dans un même plan vertical, et visibles de la station S . Une des longueurs $AA', A'A'',$ etc., peut être parcourue et mesurée, et on a la possibilité de placer des mires aux points de réunion $A, A', A'', A''',$ etc., de toutes ces longueurs. Le problème fondamental de la méthode est celui de déduire de la longueur unique donnée et des angles, tant horizontaux que verticaux, observés du point S , les distances des points $A, A', A'',$ etc., entre eux et à la station S , et les différences de niveau entre ces points et le centre de l'instrument en S .

(4) Une excellente manière d'observer est celle d'employer, au lieu des mires dont je viens de parler, des verrières paraboliques ayant, à leurs foyers, des mèches à courant d'air; mais cette méthode, bien favorable à la précision, a l'inconvénient de l'embarras et de la dépense; elle est, de plus, adaptée aux opérations nocturnes, qui ne conviennent pas à tous les observateurs (1).

(1) MM. Arago et Mathieu, membres du bureau des longitudes, ont récemment employé, pour des opérations géodésiques, destinées à lier les observatoires de Paris et Greenwich (et en général, les systèmes de triangulation anglais et français),

(5) Pour déterminer ces diverses inconnues, on partagera la longueur $A'A''$, que je suppose être celle des longueurs AA' , $A'A''$, $A''A'''$, etc., qu'on peut parcourir et mesurer, en deux segments $A'q$, qA'' éga^{ux} ou inéga^{ux}; leur égalité simplifie un peu le calcul; on mesurera bien exactement chacun de ces segments, et les centres des trois mires étant sur une même ligne droite parallèle à celle du terrain, on relèvera de la station S , les angles $A'Sq$, $A'SA''$, lesquels, avec les longueurs $A'q$ et qA'' suffiront pour calculer les distances SA' , Sq , SA'' , et les angles $A''A'S$, $A''qS$; on relèvera de plus les angles $A'SA$, $A'SA'''$, $A'SA''''$, etc., les distances au zénith des centres des mires placées en A , A' , q , A'' , A''' , etc., et on aura toutes les données nécessaires pour résoudre le problème, ou pour déterminer les distances et les différences de niveau cherchées en employant les règles de calcul que j'exposerai ci-après.

La base AA' , mesurée en *rachetant* les aspérités du terrain doit être ou horizontale ou d'une seule pente, si elle est inclinée; et il faudra placer les centres des trois mires à la même hauteur au-dessus de cette ligne *mesurée*, qui se trouvera ainsi parallèle à la droite passant par les trois centres.

(6) Il sera bon, lorsque les localités le permettront, et que l'observateur aura du temps à sa disposition, de répéter l'o-

des feux infiniment supérieurs à tous ceux dont on s'était servi avant eux; ces feux, adaptés aux phares des côtes de France, d'après les idées et les projets de M. Fresnel, Ingénieur des ponts et chaussées, peuvent être aperçus de jour, à de très-grandes distances; ils sont donnés par des lampes à courant d'air et à mèches multiples concentriques, dont la lumière traverse des lentilles d'un grand diamètre composées de pièces de rapport, qu'on appelle lentilles à échelons. Les détails, relatifs à ces feux, seront publiés.

opération en prenant sur la ligne $AA'A''$, etc., deux segments contigus autres que ceux sur lesquels on a opéré d'abord ; mais un excellent moyen de vérification, lorsqu'on pourra parcourir et mesurer sur cette ligne $AA'A''$, etc., un espace d'une longueur convenable, sera celui de diviser cet espace en trois segments. Les combinaisons de ces segments, deux à deux, fourniront plusieurs manières de faire le calcul, qui se serviront réciproquement de preuves.

Soient, par exemple, les trois segments $A'q$, qA'' , $A''q'$, dont on puisse mesurer les longueurs, on aura les combinaisons binaires.

$$\begin{array}{l} A'q \dots\dots q A'' \\ A'q \dots\dots q q' \\ A'A'' \dots\dots A''q' \\ q A'' \dots\dots A''q' \end{array}$$

dont chacune, employée comme donnée de calcul, devra conduire aux mêmes résultats que les données $A'q$ et qA'' , employées en premier lieu ; j'ai presque toujours mis, de cette manière, ma méthode en pratique.

(7) J'ai supposé, dans les deux articles précédents, que la base prise sur la ligne $AA'A''$, etc., faisait des angles quelconques avec les rayons visuels partant de la station S et aboutissant aux extrémités des segments de cette base ; mais on obtiendra une simplification notable, lorsque cette même base sera perpendiculaire à un des rayons visuels. Il faut, pour gagner cet avantage, que les localités s'y prêtent de manière qu'on puisse faire varier dans de certaines limites la direction de la ligne $AA'A''$, etc. ; il faut aussi que l'homme chargé de la conduite des opérations qui se font

sur le terrain, soit en état de tracer un alignement à angle droit sur une direction donnée. La première condition sera assez fréquemment remplie; et la seconde exige moins d'instruction et d'intelligence que n'en ont ordinairement les conducteurs des ponts et chaussées. On se procurera aisément un instrument donnant exactement l'angle droit, et s'il n'est destiné qu'à cet usage, la dépense en sera peu considérable.

On voit, sur le champ, que l'état des choses tel que je viens de le supposer, donne deux triangles rectangles; un seul de ces triangles suffit pour avoir la position de la base par rapport au point S de la station; si l'angle droit se trouve à l'une des extrémités de la base, il sera inutile de la diviser en deux segments; et même lorsque le sommet de l'angle droit se trouve au point q, on peut se dispenser de mesurer les longueurs qA' , qA'' il suffit, ainsi qu'on va le voir, de connaître la longueur de la base entière $A'A''$.

(8) Ce dernier problème est lié à des règles d'opération et de calcul, qui, je crois, sont nouvelles, en géodésie, et peuvent avoir des applications utiles. La base prise sur $AA'A'$, etc., étant donnée, il n'est pas nécessaire que le sommet de l'angle droit soit un des points de cette base, il suffit que ce soit un des points de sa direction prolongée ou dans un sens ou dans l'autre, et de plus, on n'a pas besoin d'avoir, *à Priori*, la distance de ce point à une des extrémités A' ou A'' : cette distance se déduira du calcul. Ainsi la ligne $AA'A''$, etc., étant posée d'une manière quelconque, par rapport à la station S, on cherchera s'il existe sur cette ligne un point abordable, tel que le rayon visuel passant par ce

point et par la station S, soit à angle droit sur $AA'A''$, etc.; de la station S on relèvera l'angle sous-tendu par la base et l'angle sous-tendu par la ligne comprise entre une des extrémités de la base et le sommet de l'angle droit. Ces deux angles, et la longueur de la base, suffiront pour arriver aux mêmes résultats qu'on obtient par les données des articles précédents, en employant les règles de calcul ci-après exposées.

Le point du terrain où se trouvera le sommet de l'angle droit, pourra ne pas être sur une même ligne de pente avec la base; mais il faudra que les centres des mires, placées sur cette base, et le centre de la mire du sommet de l'angle droit soient sur une même ligne droite.

(9) Enfin, la position du même sommet d'angle droit, sur la direction de la base, étant inconnue, si on emploie, comme données, la base et ses deux segments, et les angles sous-tendus par ces lignes, on aura les éléments de calcul nécessaires pour déterminer cette position, et, dans certaines circonstances, une pareille détermination sera fort utile.

(10) Les choses étant dans l'état où je les ai supposées, art. 5, et suivants, on résoudra immédiatement par les méthodes du § III, ci-après, les triangles qui ont un sommet commun en S, et pour côtés, opposés à ce sommet, les segments de la base, la base elle-même, ou cette base et son prolongement, jusqu'à un sommet d'angle droit, si on a employé les procédés indiqués art. 8 et 9.

On aura aussi les différences de niveau entre les centres des mires observées sur la direction de la base et le centre de l'instrument en S. Il sera aisé dès lors de déterminer les positions des mires placées à tous les autres points de la

ligne $AA'A''A'''$, etc., c'est-à-dire leurs distances entr'elles et à la station S, et leurs hauteurs respectives par rapport à cette station, lorsqu'on aura mesuré, du point S, les angles que forment entr'eux, et avec SA' et SA'' , les rayons visuels dirigés sur les points A, A''' , A'' , etc., et les distances au zénith de ces différents points. En effet, continuant à regarder $A'A''$ comme la base, on connaîtra, par ce qui précède, les angles et les côtés du triangle $SA'A'$. On aura donc immédiatement dans chacun des deux triangles contigus $SA'A'$, $SA''A'''$, un côté et les deux angles adjacents, savoir : dans le premier, le côté SA' l'angle $SA'A'$, supplément de $SA'A''$ et l'angle observé $A'SA'$; dans le second, le côté SA'' , l'angle $SA''A'''$ supplément de $SA'A'$ et l'angle observé $A''SA'''$.

Ces deux triangles résolus formeront, pour résoudre ceux qui leur sont contigus, des données de même espèce que celles qui ont servi à leurs propres solutions, et on connaîtra ainsi les angles et les côtés de tous les triangles dont les sommets sont en S, et dont les côtés opposés à ces sommets sont sur $AA'A''A'''$, etc.

Les longueurs SA , SA' , SA'' , SA''' , etc., et les angles d'élévation et d'abaissement, par rapport à l'horizon, des points A, A' , A'' , A''' , etc., serviront à faire connaître les différences respectives de niveau entré ces points et le centre de l'instrument en S.

(11) Tout ce qui concerne la ligne $AA'A''A'''$, étant ainsi terminé, si on a d'autres lignes, visibles de la station S, la ligne $aa'a''a'''$, etc., par exemple, dont on veuille déterminer la position et faire le nivellement, on fera, sur cette ligne, les mêmes opérations que sur la ligne $AA'A''A'''$, etc. Pour lier ensuite ce second système d'opérations au premier, on

observera l'angle formé par une des lignes $SA, SA', SA'',$ etc., et par une des lignes $Sa', Sa'', Sa''',$ etc. Soit $A''Sa$ cet angle; on connaîtra, dans le triangle $A''Sa$, l'angle en S , observé, et les côtés SA'', Sa , déduits des opérations et des calculs précédemment faits sur les lignes $AA'A'',$ etc., et $aa'a'',$ etc.

On aura donc les données nécessaires pour calculer la distance $A''a$ et pour connaître les angles en A'' et en a .

(12) Le calcul relatif à la liaison des lignes $AA'A'',$ etc., et $aa'a'',$ etc., sera un peu simplifié, si la seconde ligne est dirigée sur un des points connus de la première; supposons, par exemple, qu'elle soit dirigée sur le point A'' ; alors les côtés $a'A$ et aA'' sont sur une même ligne droite, l'angle SaA'' est supplément de Saa' , et il ne reste à connaître, dans le triangle SaA'' , que le côté aA'' , qui se calcule par un des deux autres côtés et les angles adjacents.

(13) On peut faire, de cette manière, sans sortir de la station S , la carte et le nivellement d'un nombre indéfini de lignes visibles de cette station; pour lier ensuite, à ce système de ligne, un autre système qui ne peut plus être aperçu, ou qui serait trop défavorablement observé du point S , il faut passer à une autre station S' , visible de S , et de laquelle on aperçoive le second système, et au moins un des points des lignes $AA'A'',$ etc., $aa'a'',$ etc., du premier; soit $aa'a'',$ etc., une des lignes de ce second système, les distances $Sa, S'a$, etc., les angles compris, etc., etc., seront déterminés comme précédemment; pour lier ensuite les deux stations et les deux systèmes ensemble, supposant que le point a'' est visible de S' , on observera, du point S , l'angle $a''SS'$, et du point S' les angles $a''S'S$ et $a''S'a$, ou $a'S'S$; (tout autre point de $aa'a'',$ etc., que le point a , pourra lui être substitué;); on connaîtra,

dans le quadrilatère $SS'a''$, les côtés Sa'' , $S'a$, les angles formés par ces côtés et par le côté inconnu SS' et l'angle formé par SS' et par la diagonale, $S'a''$; ce quadrilatère sera donc complètement déterminé.

On arriverait évidemment aux mêmes déterminations, si, au lieu d'avoir un point du premier système visible de la seconde station, on avait un point du second système visible de la première; et il serait fort avantageux, pour multiplier les moyens de vérification, de réunir les deux conditions ensemble.

(14) Aucune de ces deux conditions ne sera nécessaire si une des lignes de l'un des systèmes est dirigée sur un point connu de l'autre; la condition des points réciproquement visibles sera alors restreinte aux deux stations seulement. Supposons que la ligne xa'' , etc., fig. 2, soit dirigée sur le point a'' ; du point S j'observe l'angle $a''SS'$; du point S' , l'angle aSS' et je connais l'angle $S'a''$ supplément de $S'a$; je connais donc, dans le quadrilatère $S'a''S$, les quatre angles et les deux côtés $S'a$ et Sa'' , et je résous ce quadrilatère sans qu'il soit nécessaire d'apercevoir, de la station d'un des systèmes, aucun point appartenant à l'autre système, excepté sa station.

Il y a un cas qui rend indéterminée la solution du problème que je viens d'indiquer, c'est celui de l'égalité et du parallélisme des côtés connus du quadrilatère; on voit, sur le champ, que, les données restant les mêmes, le côté inconnu SS' peut avoir une longueur arbitraire. Ce cas, purement théorique, n'aura jamais rigoureusement lieu dans la pratique; mais il fait éviter les combinaisons de données qui s'en approcheraient trop; et, par exemple, si la direction

$S'x$ ne convergeait pas assez sur Sx'' , il faudrait à Sx substituer une autre direction $S'x'$, plus convergente.

Ces considérations de quadrilatères conduisent à un problème dont la solution peut avoir des applications utiles, celui de la détermination de la position d'un point O, fig. 3, invisible de la station S, lorsqu'on peut voir de cette station les deux lignes droites $A'A''$, $A'A'''$, susceptibles d'être parcourues et mesurées et dirigées, chacune sur ce point O. Je reviendrai sur ce problème dans les paragraphes suivants.

(15) Les lieux marécageux, pour lesquels ma méthode est spécialement destinée, n'offrent pas, en général, des lignes d'une grande déclivité; les inflexions du terrain seront ordinairement assez faibles pour permettre de placer, sur chacune des lignes faisant partie du système total, les centres des mires dans un même axe, horizontal ou incliné; et, soit qu'on fasse ou qu'on ne fasse pas de réduction à l'horizon, on aura égard, pour obtenir les cotes ultérieures du nivellement, aux diverses hauteurs de ces centres au-dessus du sol.

Supposant d'abord que de la station S, fig. 1, on observe les points A, A', A'', etc., de la ligne AA'A'', etc., avec un cercle répétiteur qui mesure les angles dans le plan des objets, les centres des mires étant disposés sur un même axe incliné; tous les triangles à calculer seront renfermés dans un même plan passant par cet axe et par le centre de l'instrument en S. On résoudra les triangles, dans ce plan, et on aura les distances SA, SA', SA'', etc., et les longueurs inclinées AA', A'A'', A''A''', etc.; (la base A'A'' est donnée par une mesure immédiate.) Au moyen de ces distances et des angles d'élévation et de dépression, des points A, A', A'',

A'' , etc., on aura les différences de niveau entre ces points et le centre de l'instrument en S , c'est-à-dire le nivellement de la ligne $AA'A''$, etc., le plan horizontal de comparaison passant par le point S .

La station étant toujours au point S , si on veut lier la position de la ligne $AA'A''$, etc., avec celle d'une autre ligne $aa'a''$, etc., et qu'on suppose cette liaison opérée par l'intermédiaire des distances SA'' , Sa et de l'angle aSA'' , la ligne Sa devra être donnée de longueur et d'inclinaison, lorsque les opérations faites sur la ligne $aa'a''$, etc., présenteront les mêmes circonstances que les opérations faites sur $AA'A''$, etc. On connaîtra donc les différences de niveau entre les points a, A'' et le point S ; ainsi le nivellement du système des deux lignes $AA'A''$, etc., $aa'a''$, etc., n'exigera aucune réduction à l'horizon, et il en sera de même du système d'un nombre quelconque de lignes, lorsque chacune d'elles aura les centres de ses mires sur une même ligne de pente, et deux segments contigus susceptibles d'être parcourus et mesurés; et les réductions des angles et des longueurs à l'horizon, ne devront avoir lieu que lorsqu'il s'agira de placer le système de ces lignes sur une carte du pays. On trouvera dans les paragraphes suivants les formules de ces réductions.

(16) Si la ligne $AA'A''$, etc., n'est pas d'une seule pente, c'est-à-dire présente des ondulations dans le plan vertical qui la renferme, alors les deux angles adjacents à un même rayon vecteur SA , SA' , SA'' , SA''' , etc., ne sont pas rigoureusement compléments l'un de l'autre; il faut donc, pour obtenir une parfaite exactitude, employer les réductions à

l'horizon, tant des angles que de la base mesurée immédiatement, et les longueurs déduites du calcul sont des longueurs horizontales.

(17) J'ai supposé, dans les deux articles précédents, que la mesure des angles était prise dans le plan des objets; mais on peut employer, pour cette mesure, un instrument qui donne, immédiatement, les angles horizontaux, la longueur de la base étant prise sur une ligne inclinée; toutes ces circonstances exigeront des réductions diverses d'angles et de lignes, pour lesquelles je donnerai des formules dans le paragraphe suivant; mais, dans tous les cas, les opérations à faire sur le terrain pourront se réduire à des mesures de lignes inclinées, et les données relatives aux réductions tant des longueurs que des angles seront prises à la station de l'observateur.

(18) Il sera donc, à la rigueur, suffisant d'avoir, dans la campagne, des hommes en état de mesurer des longueurs, d'aligner des jalons et de placer des mires. Cependant il arrivera fréquemment de trouver, parmi ces agents, quelques personnes capables au moins de donner un coup de niveau. L'observateur aura ainsi, comme moyen de vérification, la faculté de lui faire prendre la différence de hauteur entre les points extrêmes de la base mesurée et parcourue, ou même entre d'autres points des lignes sur lesquelles il aura à opérer; si les lignes placées entre ces points ne peuvent pas être parcourues, on emploiera l'excellente méthode du *nivellement réciproque*, en plaçant successivement le niveau à chacune des extrémités dont on veut avoir les hauteurs respectives.

Au reste, je le répète, les localités pour lesquelles ma mé-

thode est particulièrement utile, dispenseront très-souvent des calculs de réductions dont j'ai parlé articles 15, 16 et 17.

Lorsque l'ingénieur pourra, de son observatoire, découvrir l'horizon de la mer, il ne manquera pas l'occasion de rapporter ses hauteurs à cet horizon, dont il mesurera l'angle de dépression, par des opérations répétées et faites avec le plus grand soin; je donnerai, ci-après, la formule par laquelle il déduira, de cet angle, la hauteur du centre de son instrument au-dessus de la mer.

(19) Je donnerai aussi, dans le paragraphe suivant, des formules pour obtenir les diverses déterminations dont il a été question depuis l'article 3, en substituant une Base verticale à une base horizontale. Cette substitution peut, parfois, être fort utile, et même offrir le seul moyen possible d'opérer; mais il ne faut l'employer que pour de petites distances, vu les difficultés qui limitent la grandeur de cette base; elle exige aussi la plus grande précision dans la mesure des angles verticaux, précision qu'on obtient toujours en opérant soigneusement avec un bon cercle répétiteur.

§ III.

Formules pour calculer les réductions diverses, les distances et les hauteurs.

(20) Je n'ai pas besoin de donner, ici, les formules relatives à la résolution des triangles rectilignes, exposées et démontrées dans tous les traités de trigonométrie; je me

bornerai à celles qui sont particulières à ma méthode et à quelques autres, lesquelles, quoique publiées, ne sont pas assez généralement connues. On peut consulter, sur les calculs géodésiques qui se rapportent à la levée des cartes et plans, et au nivellement, les ouvrages de M. le colonel Puissant.

Je commencerai par les formules qui donnent l'angle horizontal lorsqu'on a l'angle dans le plan des objets et réciproquement, et qui se rapportent au contenu des art. 15, 16 et 17. Voici l'énoncé du problème que ces formules résolvent. « Deux plans verticaux, formant entr'eux un angle c , et passant par le zénith de l'observateur, coupent un plan, « incliné à l'horizon, sur deux traces, ou lignes d'intersection, faisant entr'elles un angle C , et avec la verticale, du « côté du zénith, les angles respectifs ξ et ξ' ; il s'agit de déduire C de c , et réciproquement. »

On fera, pour simplifier la notation,

$$s = \frac{1}{2} (C + \xi + \xi'),$$

et on déduira c de C par l'une ou l'autre des équations

$$\sin. \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\sin. (s - \xi) \sin. (s - \xi')}{\sin. \xi \sin. \xi'}},$$

$$\cos. \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\sin. s \sin. (s - C)}{\sin. \xi \sin. \xi'}}.$$

Pour déduire C de c , on fera

$$\text{tang. } \theta = \frac{\cos. \frac{1}{2} c}{\cos. \frac{1}{2} (\xi + \xi')} \sqrt{\sin. \xi \sin. \xi'},$$

et on aura

$$\cos. \frac{1}{2} C = \frac{\cos. \frac{1}{2} (\xi + \xi')}{\cos. \theta}.$$

Si on a les tables, dont je parlerai ci-après, au moyen desquelles on trouve, immédiatement, le logarithme de la somme de deux nombres lorsqu'on a les logarithmes particuliers de chacun de ces nombres, on calculera C , d'après c , en employant la formule unique

$$\cos. \frac{1}{2} C = \sqrt{\cos. \frac{1}{2} (\xi + \xi') + \sin. \xi \sin. \xi' \cos. \frac{1}{2} c}.$$

(21) Les formules précédentes donnent rigoureusement l'angle horizontal c , par l'angle C , dans le plan des objets, et réciproquement, les distances au zénith, ξ et ξ' , étant des données communes à la directe et l'inverse; dans les cas de pratique que l'usage de ma méthode comporte, chacun des angles ξ et ξ' est, ordinairement, peu différent de l'angle droit, et, par conséquent, le rapport entre c et C , est voisin du rapport d'égalité; il sera commode, dans ces cas de pratique, de calculer simplement la différence entre c et C par les formules suivantes d'approximation.

On fera ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{angle droit} - \xi = \delta \\ \text{angle droit} - \xi' = \delta' \\ \bullet c - C = \epsilon \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta \text{ et } \delta', \xi \text{ et } \xi', \text{ sont supposés} \\ \text{exprimés en secondes.} \end{array}$$

$R'' = 206264'' , 8$ { R'' est le nombre de secondes conte-
On a, $\log. R'' = 5,3144251$ { nues dans l'arc égal au rayon.

et on aura, lorsque C sera l'angle donné,

$$\epsilon = \frac{(\delta + \delta') \cdot \text{tang. } \frac{1}{2} C - (\delta - \delta') \cdot \text{cotang. } \frac{1}{2} C}{4 R''},$$

Si c est l'angle donné dont on veuille déduire C , il suffira de substituer c à C , dans la formule précédente, ce qui donnera

$$s = \frac{-(\delta + \delta')^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} c + (\delta - \delta')^2 \cot \frac{1}{2} c}{4 R''},$$

$$C = c - s.$$

Il faut bien faire attention aux signes de δ et δ' qui peuvent être ou tous deux positifs, ou tous deux négatifs, ou l'un positif et l'autre négatif. Dans les deux premiers cas, $\delta + \delta'$ et $\delta - \delta'$ sont, respectivement, l'une une somme et l'autre une différence de deux nombres; dans le troisième cas, c'est $\delta + \delta'$ qui devient la différence, et $\delta - \delta'$ la somme. Les signes de ces sommes ou de ces différences n'influent pas sur le signe de s parce qu'elles sont élevées au carré, et comme c est toujours plus petit que deux angles droits, chacun des deux produits qui entrent dans le numérateur de la valeur de s sera positif, et s sera positif ou négatif, respectivement, suivant que le produit affecté du signe $+$ sera plus grand ou plus petit que le produit affecté du signe $-$.

(22) $A'A''$, fig 1, étant, comme précédemment, la partie de la ligne $AA'A''A'''$, etc. mesurable et mesurée, celle qui sert de *base* pour déterminer les positions et faire le nivellement de tous les autres points de la même ligne où on peut placer des mires, quelque soit l'angle formé par cette *base* et par l'horison, on aura toujours, ou immédiatement, ou par les règles de calcul qui précèdent, les angles $A'Sq$, $A'SA''$ dans le plan passant par le centre de l'instrument en S , et par les centres des mires placées en A' , q et A'' , dans une même ligne droite. Il faudra, alors, en employant les for-

mules que je donnerai ci-après, calculer les distances SA' , Sq et SA'' ; ensuite, au moyen de ces distances et des angles de dépression et d'élévation des points A' , q et A'' , par rapport au point S , on déterminera la différence de niveau entre ce point S et les points S , q et S ; il est indispensable, dans ce calcul, d'avoir égard à la réfraction terrestre, et on pourra employer les formules suivantes:

Soient, fig. 4, nos 1 et 2, A la station, B' le point observé, C le centre de la terre, CAA' et CBB' , deux verticales passant par les points A et B' , respectivement; AB et $A'B'$, deux arcs de grand cercle, horizontaux, dont le centre commun est en C , AaB' la courbe suivante laquelle s'infléchit le rayon lumineux, en allant de B' en A , Aq une tangente, en A , à l'arc AB , Aq' une tangente, en A , à la courbe AaB' .

Le rayon. $CB =$

(On a, valeur moyenne, $\log. p = 6,8038794, p$ étant exprimé en mètres).

La distance, connue AB , exprimée en mètres, = A

L'angle apparent d'élévation ou de dépression, celui qui est donné, immédiatement, par l'observation =

Rayon de courbure, au point A , de l'arc lumineux $AaB' =$

Nombre de secondes contenues dans l'arc égal au rayon = $206264'',8$

(On a $\log. R'' = 5,3144251$).

Différence de niveau BB' entre la station A et le point observé $B' =$

Z

On a, pour calculer Z, l'équation •

$$Z = A \operatorname{tang.} \left[\varphi \pm \left(0,5 - \frac{1}{2K} \right) \frac{AR'}{p} \right].$$

(23) On a reconnu, par diverses observations et considérations, qu'on pouvait regarder $\frac{1}{2K}$ comme un nombre constant, égal à 0,08, d'où $0,5 - \frac{1}{2K} = 0,42$.

$$\begin{aligned} \log. 0,42 &= \overline{1,6232493} \\ \log. R' &= 5,3144251 \\ \text{Comp. log. } p &= \overline{7,1961206} \\ \left(0,5 - \frac{1}{2K} \right) \frac{R'}{S} &= \overline{2,1337950} = \log. 0,013608. \end{aligned}$$

ainsi la formule pratique sera, le mètre étant l'unité linéaire,

$$Z = A \operatorname{tang.} (\varphi \pm 0,013608 A.).$$

Les signes supérieur et inférieur se rapportent, respectivement, aux nos 1 et 2; le produit 0,013608 A' exprime des secondes de l'ancienne division sexagésimale du cercle.

(24) A représente, dans cette valeur de Z, la distance, réduite à l'horizon, du centre de l'instrument au centre de la mire, dont on veut calculer la cote de nivellement. Si on voulait employer, sans réduction, la distance inclinée représentée par A', qu'on obtient immédiatement par les angles pris dans le plan des objets, on pourrait employer la formule

$$Z = A' \sin. (\varphi \pm 0,013608. A')$$

la différence entre la valeur donnée par la tangente et la va-

leur donnée par le sinus, sera le plus souvent assez petite, pour qu'on puisse indifféremment employer l'une et l'autre formule.

(25) J'ai dit, art. 19, que lorsque l'observateur pourrait, de sa station, découvrir l'horizon de la mer dans toute l'étendue compatible avec la courbure de la surface, il ne devait pas manquer de déterminer la hauteur du centre de son instrument par rapport à cet horizon. Il suffit, pour cette détermination, de mesurer l'angle de dépression du rayon visuel tangent à la surface de la mer; désignant par ω et par z , respectivement, cet angle et la hauteur du centre de l'instrument au-dessus de la mer, on aura

$$z = \frac{1}{2} \rho (1 + n)^2 \operatorname{tang}^2 \omega \left\{ n = \frac{1}{2K}; \rho \text{ et } K \text{ ont, ici les mêmes valeurs qu'à l'art. 20.} \right.$$

on a $\frac{1}{2} (1 + n)^2 = 0,5832,$

$$\log. \frac{1}{2} (1 + n)^2 = 1,7658175$$

$$\log. \rho = 6,8038794$$

$$\log. \frac{1}{2} \rho (1 + n)^2 = 6,5696969$$

d'où on déduit la formule logarithmique

$$\log. Z = 2 \log. \operatorname{tang} \omega + 6,5696969.$$

L'observation de la dépression de la surface de la mer doit être répétée plusieurs fois et dans les circonstances les plus favorables, relativement aux incertitudes provenant de la refraction terrestre et des variations accidentelles du niveau de la mer. Il faut, à chaque fois, former une série dont les derniers angles n'offrent pas entre eux de différences sensibles; on prend ensuite une valeur moyenne entre les résultats des différentes séries, et je pense qu'on obtient ainsi

une hauteur moyenne de la surface de la mer, au moins aussi exacte que la hauteur fournie par l'observation des échelles hydrométriques qui présentent beaucoup de causes d'anomalies; au reste, on pourra ordinairement rattacher au nivellement un ou plusieurs points du sol dans le voisinage du rivage de la mer, ou sur ce rivage même, qui fourniront des moyens faciles de comparaison et de vérification.

(26) J'ai fait voir comment on pouvait déduire de la mesure d'une base inclinée à l'horizon, et de l'observation d'un certain nombre d'angles, les longueurs horizontales de toutes les sous-divisions de la ligne sur laquelle se trouve cette base, et les cotes de nivellement des centres des mires placées sur cette ligne, en réduisant simplement à l'horizon les angles observés; après avoir déterminé la différence de niveau que je désigne par δ , entre les extrémités de la base dont la longueur est représentée par b , on aura, en appelant ϵ la projection de b sur le plan horizontal,

$$\epsilon = \sqrt{(b + \delta)(b - \delta)},$$

(27) Avant de passer aux formules qui se rapportent spécialement à ma nouvelle méthode, je donnerai encore celle qui résout le problème de polygonométrie dont j'ai parlé, art. 14.

Il s'agit, fig. 5, de résoudre le quadrilatère $ABba$, lorsqu'on connaît ses angles et deux de ses côtés opposés entre eux. Soient les côtés connus AB et ab ; l'une des sommes d'angle $A + B$, ou $a + b$ sera nécessairement plus petite que deux angles droits, et supposant que c'est la somme $A + B$, les côtés inconnus Aa et Bb devront se rencontrer en un point c , et l'angle $\hat{c}$ sera un angle connu.

Soient

$$AB = p,$$

$$ab = q,$$

on calculera Aa et Bb par les formules

$$Aa = \frac{p \sin. B - q \sin. b}{\sin. s},$$

$$Bb = \frac{p \sin. A - q \sin. a}{\sin. c},$$

(28) Je passe maintenant aux formules particulières à ma nouvelle méthode, et qui, par conséquent, ne sont pas encore connues. Ces formules ont, pour objet, de fournir les moyens de résoudre un triangle $SA'A''$, fig. 1, lorsqu'on connaît le côté $A'A''$, l'angle opposé à ce côté, la position d'un point q sur $A'A''$, et l'angle qSA' ; on peut substituer; à ces deux dernières données, l'angle formé par l'un des côtés SA' ou SA'' , et par une ligne perpendiculaire sur la direction de AA'' ; dans ce dernier cas, il n'est pas nécessaire de connaître d'avance la position du pied de la perpendiculaire. Voici les formules relatives au premier cas.

Soient

$$\begin{aligned} & \text{la base } A'A'' = \dots\dots\dots b \\ \text{le segment...} & \left\{ \begin{array}{l} A'q = \dots\dots\dots b' \\ A''q = \dots\dots\dots b'' \end{array} \right\} b = b' + b'', \\ & \text{l'angle total } A'SA'' \dots\dots c \\ \text{l'angle partiel} & \left\{ \begin{array}{l} A'Sq = \dots\dots\dots c' \\ A''Sq = \dots\dots\dots c'' \end{array} \right\} c = c' + c'', \\ & SA' = \dots\dots\dots r' \\ & Sq = \dots\dots\dots r'' \\ & SA'' = \dots\dots\dots r'''. \end{aligned}$$

Les quantités données par les mesures des angles et par celles des longueurs, sont c' , c'' , b' , b'' ; les quantités inconnues sont r' , r'' , r''' et les angles formés par ces lignes et par la base b .

Je remarque d'abord qu'on a les inégalités correspondantes

$$\begin{aligned} b' \sin. c'' &> b'' \sin. c'; & r' &> r''; & \text{angle } SA''A' &> \text{angle } SA'A'', \\ b' \sin. c'' &< b'' \sin. c'; & r' &< r''; & \text{angle } SA''A' &< \text{angle } SA'A''. \end{aligned}$$

Les logarithmes de $b' \sin. c''$ et $b'' \sin. c'$ indiqueront quel est le plus grand de ces deux produits, sans qu'il soit nécessaire de passer aux nombres; on saura donc quel est le plus petit des angles $SA''A'$, $SA'A''$, et quel est le plus grand des côtés r' , r'' ; désignant le plus petit des deux angles par f , et le plus grand par F , le plus grand des produits $b' \sin. c''$ et $b'' \sin. c'$, par G ; le plus petit par g , et déterminant un angle h tel que $\text{tang. } h = \frac{G}{g}$; faisant de plus, pour abréger,

$$\Omega = \frac{1}{2}(\pi - c); \quad \omega = \frac{1}{2}(F - f);$$

(π est la valeur angulaire de la demi-circonférence)

on aura

$$\text{tang. } \omega = \text{tang. } \Omega \cdot \text{tang. } \left(\frac{1}{2}\pi - h \right),$$

$$F = \Omega + \omega,$$

$$f = \Omega - \omega.$$

J'ai établi la marche du calcul de manière que ω et $\pi - h$ soient toujours des angles positifs; ce qui sera commode pour beaucoup de calculateurs.

F sera l'angle $SA''A'$, lorsqu'on aura $b' \sin. c'' > b'' \sin. c'$; dans le cas contraire, F sera l'angle $SA'A''$. On connaîtra

donc, dans le triangle $SA'A''$, le côté $A'A''$, et les trois angles; les deux autres côtés se détermineront par les règles de la trigonométrie élémentaire : ainsi on aura,

$$r' = \frac{\sin. SA''A'}{\sin. c} b,$$

$$r'' = \frac{\sin. SA'A''}{\sin. c'} b' = \frac{\sin. SA''A'}{\sin. c''} b'',$$

$$r''' = \frac{\sin. SA'A''}{\sin. c} b.$$

r' étant calculé, on pourra rendre le calcul de r'' un peu plus expéditif, en faisant attention que la détermination de l'angle f a exigé d'avance la recherche de $\log. \text{tang. } h$, et qu'on a $r''' = \frac{b''}{b'} \cdot \frac{\sin. c'}{\sin. c''}$, r' = le produit de r' par la tangente ou la cotangente de h , ce qui donne

$$\log. r'' = \log. r' \pm \log. \text{tang. } h.$$

Les signes + et — devant être employés respectivement lorsqu'on a $b' \sin. c'' > b'' \sin. c'$, ou $b' \sin. c'' < b'' \sin. c'$.

r'' n'étant ici qu'une quantité auxiliaire, on pourra en général se dispenser de la calculer; cependant, son calcul, si on veut le faire, n'exigera la recherche d'aucun nouveau logarithme, si on employe la formule $r'' = \frac{\sin. SA''A'}{\sin. c''} b''$, attendu que pour savoir quelle était la plus grande des quantités $b' \sin. c''$ et $b'' \sin. c'$, et pour calculer r' , on a été obligé de de chercher d'avance les logarithmes de b' , b'' , $\sin. c'$, et $\sin. SA''A'$.

(29) Les côtés r' , r'' , les angles F, f et tous les autres angles observés de la station S entre les lignes menées de cette

station aux points A, A', A'', A''', A''' , etc., sont les éléments de calcul au moyen desquels on achève de déterminer les positions de tous ces points, conformément à ce qui a été dit, art. 10, et en ayant égard au contenu des art. 15, 16 et 17, sans être obligé de mesurer sur la ligne $AA'A''A'''$, etc. d'autre longueur que celle de $A'A''$.

(29) Voici un moyen de calculer immédiatement r', r'' et r''' sans employer les angles F et f , qui pourrait être utile dans le cas où on n'aurait à opérer que sur la ligne $A'A''$.

Faisant pour abréger la notation,

$$\frac{b'}{b''} \cdot \frac{\sin. c'}{\sin. c''} = n; \quad \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos. c} = m,$$

on aura,

$$\left. \begin{aligned} r' &= \frac{b}{m} \\ r'' &= nr' = \frac{n}{m} b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

autrement faisant,

$$\left. \begin{aligned} \frac{b'}{b''} \cdot \frac{\sin. c'}{\sin. c''} &= n; \quad \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos. c} = m, \\ r''' &= \frac{b}{m}, \\ r' &= n \cdot r''' = \frac{n}{m} b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(On observera que $\log. n$ = complément $\log. n$)

et enfin,

$$r'' = \frac{\sin. c}{m \sin. c''} \cdot b'' = \frac{\sin. c}{m \sin. c'} \cdot b' \dots\dots\dots (3)$$

(30) Lorsque l'angle c est petit, la quantité $m = 1 + n^2 - 2n \cos. c$ est aussi très-petite; c'est un inconvénient, dans le calcul, qu'on évitera en procédant comme il suit :

Chercher l'angle ψ , donné par l'équation,

$$\text{tang. } \psi = \frac{1+n^2}{2n \cos. c};$$

Cet angle doit toujours être plus grand qu'un demi-angle droit lorsque m est réel, ainsi on doit avoir $\text{tang. } \psi > 1$, et π étant la valeur angulaire de la demi-circonférence, on aura

$$m' = (1+n^2+2n \cos. c) \text{ tang. } (\psi - \frac{1}{2}\pi).$$

la somme $1+n^2+2n \cos. c$ est ainsi substituée à la différence $1+n^2-2n \cos. c.$, le même procédé s'applique à $1+n^2-2n \cos. c$, en faisant

$$\text{tang. } \psi_1 = \frac{1+n^2}{2n_1 \cos. c},$$

et employant ensuite la formule

$$m'_1 = (1+n^2+2n_1 \cos. c) \text{ tang. } (\psi_1 - \frac{1}{2}\pi).$$

(31) Les règles que je viens de poser sont indépendantes de la position de la base $A'A''$ (fig. 1) par rapport aux trois rayons visuels SA' , Sq , SA'' , dirigés sur cette base. Il faut cependant chercher à s'arranger de manière que la différence entre les angles $SA''A'$ et $SA'A''$ ne soit pas trop forte; l'extrême obliquité de $A'A''$ sur SA' , ou SA'' , rendrait l'exactitude des résultats difficile à obtenir.

Cet inconvénient étant évité, on obtiendra d'ailleurs, ainsi que je l'ai dit, art. 7, une simplification notable, si l'on peut donner à la base $A'A''$, et, par suite, à la ligne $AA'A''A'''$ etc. une position telle qu'un des rayons visuels SA , Sq ou SA'' soit perpendiculaire à cette base. Dans ce cas, deux des trois lignes r' , r'' , r''' sont des hypoténuses de triangles rectan

gles, et on n'a besoin que de connaître la longueur totale de la base et les angles observés du point S.

Mais il n'est pas nécessaire que le sommet de l'angle droit tombe entre les points A' et A'', et voici la solution générale du problème.

La figure 3, n° 1, 2 et 3, représente les trois cas de cette solution. Dans les n° 1 et 2, le sommet de l'angle droit tombe à la gauche de l'observateur placé en S et regardant le point A', ce qui comprend le cas, représenté par le n° 1, où ce sommet serait placé sur la base A'A'', entre les extrémités A' et A'' de cette base. Dans le n° 3, le même sommet est placé à la droite de l'observateur.

Faisant pour les trois cas,

$$\begin{array}{l} \text{distances cherchées} \quad \left\{ \begin{array}{l} SA' = r' \\ Sq = r'' \\ SA'' = r''' \end{array} \right. \\ \text{base mesurée.....} \quad A'A'' = b \\ \text{angles observés du} \quad \left\{ \begin{array}{l} A'SA'' = \alpha \\ A'Sq = \gamma' \\ A''Sq = \gamma'' \end{array} \right. \\ \text{point S,} \end{array}$$

on a les valeurs bien faciles à calculer

$$\begin{aligned} r' &= \frac{b \cos. \gamma''}{\sin. \alpha}, \\ r'' &= \frac{b \cos. \gamma' \cos. \gamma''}{\sin. \alpha}, \\ r''' &= \frac{b \cos. \gamma'}{\sin. \alpha}, \end{aligned}$$

Voilà les hypoténuses et un côté commun, de deux

triangles rectangles dans chacun desquels on connaît de plus un des deux angles aigus, et tout se trouve ainsi déterminé.

(32) Il peut se faire que le pied de la perpendiculaire non-seulement n'existe pas sur la base $A'A''$, fig. 1, mais ne soit pas même accessible sur son prolongement à droite ou à gauche de cette base. Dans ce cas, les angles γ' et γ'' ne pourront pas être observés du point S, puisque la position du sommet de l'angle droit n'est pas connue; mais ces angles γ' et γ'' pourront se déduire, ainsi que je l'ai dit art. 9 de la mesure de la base $A'A''=b$, de celle de ses segments $A'q=b'$, $A''q=b''$ et des angles que ces diverses lignes sous-tendent. Ce problème ne serait pas d'une grande importance pour l'objet qui m'occupe, s'il ne fournissait pas une nouvelle méthode de calcul par laquelle on peut déterminer les distances de la station de l'observateur aux extrémités de la base b , méthode qui pourra entrer en concurrence avec celles que j'ai données précédemment, et, parfois, leur être préférée.

Connaissant b , b' , b'' , c et c' (voyez la notation de l'art 28), on calculera la quantité

$$f = \frac{\text{tang. } c'}{\text{tang. } c} b,$$

et on aura

$$\text{tang. } \gamma' = \frac{b' - f}{b'' \text{ tang. } c'}; \quad \gamma'' = c - \gamma',$$

il faudra prendre garde au signe de tang. γ' qui peut faire de $c - \gamma'$ une somme au lieu d'une différence.

Connaissant ainsi γ' et γ'' , on calculera r' , r'' , r''' par les formules de l'article précédent.

(33) Les formules de l'article 31 s'appliquent immédiate-

nient au cas dont j'ai parlé art. 19. Supposons, fig. 3, que la base $A'A''$ soit une ligne verticale, la perpendiculaire Sq , sur la direction de cette base, sera une horizontale; conservant la notation de l'art. 31, les angles γ'' et γ' seront, dans le cas du n° 1, l'un un angle d'élévation, l'autre un angle de dépression; dans les cas des n° 2 et 3, ils seront tous deux ou des angles de dépression, ou des angles d'élévation. Connaissant donc la longueur de la verticale $A'A''$, et les angles c , γ' et γ'' , on calculera la distance horizontale $Sq=r''$ et les distances inclinées $SA'=r'$ et $SA''=r'''$ par les formules de l'art. cité.

J'ai fait des dispositions pour exécuter, par cette méthode, un nivellement des douelles des clefs des ponts de la Seine, dans la traversée de Paris,

(34) Je vais, en terminant ce paragraphe, donner la solution d'un problème de géodésie qui s'obtient aisément par les méthodes précédentes. Je suppose que l'observateur placé au point S , fig. 6, veuille, sans sortir de cette station, déterminer la position d'un point O qu'il ne peut pas voir. Le problème sera soluble si les localités lui permettent de faire mesurer sur le terrain deux bases $A'A''$ et $A,A_''$, alignées chacune sur ce point O ; c'est un travail que les agents employés dans la campagne pourront toujours exécuter. Connaissant $A'A''$, $A,A_''$ et divisant ces bases en segments, s'il est nécessaire, il fera les opérations et les calculs prescrits dans les deux § précédents, et il en déduira les longueurs de SA' et de $SA_''$ et les angles $A''A'S$, $A,A_''A'S$; il observera, de plus, l'angle $A'SA_''$, et même comme moyen de vérification, l'angle $A'SA_''$; imaginant $A''A'$ prolongée jusqu'à sa rencontre avec $SA_''$, en B' , il connaîtra dans le triangle $SA'B'$ le côté SA' et les deux angles adjacents; il en déduira SB' , et par suite

$B'A \equiv SA, - SB'$; il connaîtra donc dans le triangle $OB'A$, le côté $B'A$, et les angles adjacents; il pourra calculer les longueurs $B'O$ et $A'O$, et le point O se trouvera lié au système des deux bases $A'A'', A_1A_2$.

Il arriverait au même résultat en calculant $B''A_2$ par un procédé absolument semblable à celui que je viens d'indiquer, et résolvant le triangle $OB''A_2$.

§ IV.

Indication des meilleures tables à l'usage des calculateurs; formules pour le calcul des logarithmes sinus et tangentes des arcs très-petits.

(35) Les ingénieurs qui opéreront sur le terrain, d'après les méthodes que je viens d'exposer, devront se servir, pour faire les calculs numériques, des tables de Callet qui donnent les logarithmes des nombres naturels de 1 à 108000, les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de seconde en seconde, pour les cinq premiers degrés, et de 10 en 10 secondes pour le quart de cercle entier; on y trouve aussi les logarithmes sinus, cosinus et tangentes pour les 10000 parties de la division centésimale du quart de cercle. Tous les logarithmes sont à 7 figures, sans compter la caractéristique, ainsi on peut avoir le nombre d'un logarithme, ou réciproquement, avec 7 chiffres significatifs, le maximum d'incertitude étant d'une unité sur le septième chiffre; et si l'on veut un nombre beaucoup plus grand de chiffres significatifs, on trouve dans l'ouvrage des tables auxiliaires assez commodes pour en faire le calcul.

Callet a joint aux logarithmes sinus, cosinus, etc., de 10 en 10 secondes, les différences entre deux logarithmes con-

sécutifs, mais sans parties proportionnelles; ainsi pour avoir les unités et fractions de secondes, on est obligé de faire une division au lieu d'une simple addition qui suffit lorsqu'on a les parties proportionnelles.

(36) M. Ducom a publié récemment un *Cours d'observations nautiques*; qui contient un recueil de tables parmi lesquelles on en trouve une des logarithmes sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, de 10 en 10 secondes, avec les différences et les parties proportionnelles pour les unités de secondes. Il est vrai que ses logarithmes ne sont qu'à six figures, mais ce retranchement d'un chiffre n'empêchera pas que ses tables, très-commodes, ne puissent dans presque tous les cas être utilement employées. Il est seulement à regretter qu'il n'ait donné les logarithmes des nombres à 6 figures, que jusqu'à 10000; un extrait de sa collection de tables qui renfermerait ses logarithmes des sinus, cosinus, et les logarithmes des nombres à 6 figures, jusqu'à 100000 ou 120000, serait certainement, agréable et utile aux calculateurs.

(37) Je vais donner l'indication de deux autres ouvrages publiés, l'un à Londres en 1792, l'autre à Altona en 1817, et qui seront d'une grande ressource à ceux qui se les procureront.

Le premier est de M. Taylor, et renferme les logarithmes des nombres de 1 à 10000, et ceux des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, pour chaque seconde du quart de cercle. Ces logarithmes sont à 7 figures, sans compter la caractéristique. L'usage de ces tables demande qu'on fasse quelque attention à la série des nombres de chaque colonne, nombres qui n'appartiennent pas toujours, sur la hauteur de la page, aux premiers chiffres placés au sommet de la

colonne, mais dont une partie peut faire suite aux premiers chiffres placés au sommet de la colonne voisine; il serait à désirer qu'on eut indiqué, par un trait, la séparation de ces deux parties, appartenantes à des têtes différentes, dans les colonnes où on a besoin d'en faire la distinction; chacun peut, ainsi que je l'ai fait sur mon exemplaire, tracer, à la main, ces lignes de séparation; elles soulagent l'attention et rendent l'usage des tables plus prompt et plus sûr.

(38) Le second ouvrage est de M. Mathiessen, il contient des tables d'une espèce nouvelle, au moyen desquelles, deux logarithmes étant donnés, on peut, sans chercher les deux nombres auxquels ces logarithmes appartiennent, trouver immédiatement le logarithme de la somme, ou de la différence de ces deux nombres; on gagne par l'usage de ces tables et de l'exactitude et du temps: il serait bien à désirer qu'on les insérât dans une édition de *Callet*; et on pourrait profiter de cette réimpression, pour y faire quelques améliorations.

(39) Lorsque les grandes tables calculées d'après mes méthodes et sous ma direction, et que les gouvernements français et anglais doivent faire imprimer à frais commun, seront publiées, on aura, pour les calculs logarithmiques, des ressources bien supérieures à celles qu'offrent les ouvrages dont je viens de parler.

(40) Les calculs numériques, faits d'après les formules du § 3, peuvent nécessiter la recherche des logarithmes sinus et tangentes d'arcs très-petits. Si ces arcs sont donnés avec des nombres entiers de secondes, leurs logarithmes sinus et tangentes se trouveront parmi ceux des cinq premiers degrés des tables de *Callet*, calculés de seconde en seconde; mais si leurs valeurs contiennent des fractions de seconde dont

l'emploi dans le calcul soit nécessaire, l'interpolation ordinaire, par les parties proportionnelles, ne sera pas assez exacte et il faudra déduire les logarithmes cherchés des formules suivantes :

Soient α le petit arc dont on veut avoir le logarithme sinus ou tangente, α'' le nombre de secondes et la fraction de seconde que cet arc contient, R'' le nombre de secondes d'un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon, on a

$$\begin{array}{l} \text{C log. signifie} \\ \text{complément du} \\ \text{logarithme.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \log. \sin. \alpha = \log. \alpha'' + \frac{1}{2} \log. \cos. \alpha + C. \log. R'' \\ \log. \tan. \alpha = \log. \alpha'' + \frac{1}{2} C. \log. \cos. \alpha + C. \log. R'' \end{array} \right.$$

Si c'est au contraire α'' qu'il faut trouver par le moyen du logarithme, sinus ou tangente, de α , on aura

$$\begin{array}{l} \log. \alpha'' = \log. \sin. \alpha + \frac{1}{2} C. \log. \cos. \alpha + \log. R'' \\ \log. \alpha'' = \log. \tan. \alpha + \frac{1}{2} \log. \cos. \alpha + \log. R'' \end{array}$$

on a $R'' = 206264''{,}806$; $\log. R'' = 5{,}31442513$; $C. \log. R'' = 6{,}68557487$ et la petitesse des arcs dispense d'avoir égard aux fractions de seconde, dans la recherche de $\cos. \alpha$.

Je donnerai ci-après, des exemples de l'application de ces formules.

On déduit des règles précédentes le logarithme de la cotangente d'un très-petit angle, qui a pour valeur

$$\log. \cot. \alpha = \frac{1}{2} \log. \cos. \alpha + C. \log. \alpha'' + \log. R''$$

et si A est un angle très-peu différent de l'angle droit, et complément de α , on a, en vertu de la relation $\tan. A = \cotang. \alpha$,

$$\log. \tan. A = \frac{1}{2} \log. \cos. \alpha + C. \log. \alpha'' + \log. R''$$

(41) Je conseille, et c'est un usage assez généralement suivi, maintenant, d'employer toujours les logarithmes avec la partie décimale positive, et de n'avoir ainsi, pour les logarithmes des nombres inférieurs à l'unité, que la caractéristique négative, qui se distingue, alors, par un trait horizontal placé au-dessus d'elle : ainsi $0,3010300$ est le logarithme de 2 et $\overline{1},3010300$ est le logarithme de 0,2.

D'après cette convention, lorsqu'on prend les logarithmes sinus, tangentes, etc., dans les tables, il faut écrire 0, pour caractéristique, lorsque les tables donnent 10, et $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$, etc., lorsque les tables donnent 9, 8, 7, 6, etc., il faut, pareillement, substituer aux caractéristiques 11, 12, etc., des tables, les caractéristiques 1, 2, etc.

Voici une règle simple et facile à retenir pour les caractéristiques des compléments des logarithmes ; « changez le « signe de la caractéristique et ajoutez 1 ; écrivez ensuite à la « place de chaque chiffre son complément à 9, en exceptant « le dernier chiffre *significatif* auquel il faut substituer son « complément à 10. » Ainsi complément, $3,0789211 = 4,9210789$; complément $4,3228740 = 5,6771260$; complément $2,8974426 = 1,1025574$; complément $3,7920400 = 2,2079600$.

Pour avoir le logarithme de la racine n° d'un nombre plus petit que l'unité, dont on a le logarithme avec la caractéristique négative, on ajoute à cette caractéristique le nombre qui lui manque pour être un multiple exact de n , et on ajoute ce nombre, pris positivement, à la partie décimale : ainsi pour avoir le logarithme de la racine 5 $^{\circ}$ du nombre qui a pour logarithme $2,4238975$, j'ajoute 3 à la

caractéristique, j'augmente la partie décimale de 3 unités entières et j'ai, pour le logarithme cherché 1.6847795. On voit que l'opération revient au calcul de la fraction

$$\frac{-5 + 3,4238975}{5}$$

§ V.

Exemples de calcul.

(42) Les exemples qui suivent sont tirés des opérations les plus délicates de nivellement, que j'ai eues à faire sur le sol des Marais Pontins, dans des cas où certaines circonstances me forçaient d'employer, comme données, des mesures angulaires et linéaires très-petites en comparaison de celles que j'avais à en déduire par le calcul. Ces exemples prouvent que la grande précision des observations et des mesures peut suppléer aux difficultés locales; mais il faudra, toujours autant qu'on le pourra, éviter ces difficultés, et le lecteur devra, uniquement, considérer le contenu de ce 5^e paragraphe, comme un choix de modèles ou types de calcul.

J'ai eu besoin*, pour mes projets de dessèchement des Marais Pontins, d'avoir les élévations au-dessus de la mer et les différences de niveau, entr'eux, de plusieurs points qui n'étaient pas compris dans les nivellements qu'on m'a communiqués; ces points étaient, en général, les plus éloignés de la mer au pied de la chaîne des Apennins qui borde la partie septentrionale des Marais; la détermination des

hauteurs de plusieurs de ces points tenait à une partie extrêmement importante des projets, celle qui concerne les eaux appelées *supérieures*. Si j'eusse voulu employer les méthodes ordinaires pour les lier soit à la mer soit aux autres points nivelés, il m'aurait fallu consacrer à ce travail beaucoup plus de temps que je n'en avais à ma disposition, et cet inconvénient, dans une atmosphère empoisonnée, n'était pas le seul que j'eusse à éviter. Il ne fallait pas, à beaucoup près, d'aussi pressants motifs pour me déterminer à employer les procédés ci-dessus exposés, et quelques matinées m'ont suffi pour mesurer, d'un petit nombre de stations où j'étais parfaitement à l'abri, les hauteurs au-dessus de la mer, dont j'avais besoin, les points ainsi nivelés étant de 20000 à 30000 mètres de distance du rivage.

(43) Je ne me suis point borné à niveller des lignes qui ne l'avaient pas encore été, mais j'ai vérifié plusieurs mesures de hauteurs connues, et c'est une de ces vérifications que je vais citer ici pour exemple: le point nivelé est à la douelle de la clef d'un ancien pont appelé des *Due Luci*, sur lequel on traverse la *Tepia* l'un des principaux torrents qui désolent le sol Pontin. Voici le détail de mes opérations et les calculs qui doivent servir d'exemple.

On a mesuré, à côté du pont, une base horizontale de 240 mètres, divisée en trois parties égales, de 80 mètres chacune; quatre mires étaient placées sur cette ligne; savoir une mire numérotée 1 à l'extrémité la plus voisine du pont, et les trois autres, numérotées, respectivement, 2, 3 et 4, à 80 mètres, 160 mètres et 240 mètres de la première.

M. l'ingénieur en chef Scaccia a voulu, par zèle, se charger de la direction des opérations à faire sur le terrain;

mais ces opérations n'avaient pas besoin, pour être bien faites, d'un homme de ce mérite; on aurait pu les confier à un simple conducteur.

Ma station était au haut de la tour de Sermonetta, et j'observais avec un cercle répétiteur qui mesurait les angles dans le plan des objets. Voici les angles moyens donnés par les observations multiples.

$$\text{Angles entre les signaux, } \left\{ \begin{array}{l} N^{\circ} 1 \text{ et } 2 \dots 0^{\circ} 50' 7'',5 \\ N^{\circ} 1 \text{ et } 3 \dots 1^{\circ} 40' 7'',5 \\ N^{\circ} 1 \text{ et } 4 \dots 2^{\circ} 30' 15'',0 \end{array} \right.$$

On peut, ainsi que je l'ai dit, art. 6, faire diverses combinaisons trois à trois des quatre signaux, pour vérifier soit l'exactitude des mesures soit les calculs: je prends les signaux $N^{\circ} 1, 3$ et 4 , et j'ai

$$\text{entre les } N^{\circ} 1 \text{ et } 3 \dots b' = 160^{\text{m}} \dots c' = 1^{\circ} 40' 7'',5$$

$$\text{entre les } N^{\circ} 3 \text{ et } 4 \dots b'' = 80 \dots c'' = 0^{\circ} 50' 7'',5$$

$$\text{Sommes} \dots b = 240 \quad c = 2^{\circ} 30' 15'',0$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (\pi - c) = 88^{\circ} 44' 52'',5$$

r', r'' et r''' étant les distances respectives de la station aux signaux $N^{\circ} 1, 3$ et 4 .

Je vais faire l'application de la première des méthodes exposées, art. 28 et suivants, au calcul des inconnues F, f, r', r'' et r''' par le moyen des données précédentes.

On a vu que F et f sont, respectivement, le plus grand et le plus petit des angles adjacents à la base b , et que G et g étant aussi la plus grande et la plus petite des quantités connues $b' \sin. c''$ et $b'' \sin. c'$, il faut, d'abord, calculer

un angle h par l'équation $\text{tang. } h = \frac{g}{G}$, et, ensuite, un angle ω par l'équation $\text{tang. } \omega = \text{tang. } \Omega \text{ tang. } (\frac{1}{2} \pi - h)$, dans laquelle $\Omega = \frac{1}{2} (\pi - c)$, ce qui donne un résultat,

$$F = \Omega + \omega; f = \Omega - \omega$$

valeurs des deux angles adjacents à la base b .

$$\begin{array}{rcl} \text{Effectuant les calculs, on a, } \Omega = 88^{\circ} 44' 52'',5 & & \\ \log. b' = 2,2041200 & \left| \right. & \log. b' = 1,9030900 \\ \log. \sin. c' = 2,1637651 & \left| \right. & \log. \sin. c' = 2,4642072 \\ \hline \log. b' \sin. c' = 0,3678851 = 1. G. & \log. b' \sin. c' = 0,3672972 = 1. g & \\ \log. G = 0,3678851 & & \\ \hline \log. \text{tang. } h = 1,9994121 & & \end{array}$$

$$h = 44^{\circ} 57' 40'',4; \frac{1}{2} \pi - h = 0^{\circ} 2' 19'',6$$

$$\log. \text{tang. } (\frac{1}{2} \pi - h) = 4,8304577$$

$$\log. \text{tang. } \Omega = 1,6604205$$

$$\log. \text{tang. } \omega = 2,4908782 = \log. \text{tang. } 1^{\circ} 46' 25''$$

ces préliminaires fournissent les valeurs suivantes,

$$\begin{array}{rcl} F = \Omega + \omega = 90^{\circ} 31' 17'',5 & \left(\text{fig. 1.} \right) & \\ f = \Omega - \omega = 86^{\circ} 58' 27'',5 & \text{ang. } SgA' = F + c' = & 91^{\circ} 21' 25'',0 \\ \text{ang. obs. } c = 2^{\circ} 30' 15'',0 & \text{ang. } SgA'' = f + c' = & 88^{\circ} 38' 35'',0 \\ \hline \text{Somme... } 180^{\circ} 00' 00'',0 & \text{Somme... } 180^{\circ} 00' 00'',0 & \end{array}$$

Comme on a $b' \sin. c'' > b'' \sin. c'$, l'angle F doit être opposé au côté c' , d'où $S A' A'' = F$, $S A' A'' = f$ (fig. 1) de plus $\log. \text{tang. } h$ est additif dans la valeur de r'' , on a, d'après ces conditions, et en ayant égard à ce que j'ai dit, art. 41, sur les signes des caractéristiques,

log. sin. F = $\overline{1,9999820}$	$\overline{1,9999820}$
log. b = $\overline{2,3802112}$	log. b' = $\overline{1,9030900}$
compt. log. sin. c = $\overline{1,3595977}$	compt. log. sin. c' = $\overline{1,8362349}$
log. r' = $\overline{3,7397909}$	log. r = $\overline{3,7393069}$
log. tang. h = $\overline{1,9994121}$	
log. r'' = $\overline{3,7392030}$	

Ces derniers calculs n'ont exigé comme on voit et comme je l'ai dit, art. 28, la recherche d'aucun nouveau logarithme; passant aux nombres on a

$$r' = 5492^{\text{m}}, 75$$

$$r'' = 5486^{\text{m}}, 64$$

$$r''' = 5485^{\text{m}}, 31$$

tout est complètement déterminé dans les deux triangles S A' q, S q A'' et les calculs relatifs à un nombre quelconque de points qu'on observerait, de la station S, sur le prolongement et de part et d'autre de la base A' A'', n'exigeraient plus, comme on a vu, paragr. 1 et 2, que l'emploi de la formule trigonométrique dans laquelle les données sont un côté et les deux angles adjacents.

(44) Mais il y a des cas où on a besoin seulement, d'une des lignes r', r'' ou r''', et alors on peut calculer immédiatement cette ligne par la méthode exposée, art. 29, sans déterminer, préalablement, les angles F et f, en employant seulement l'angle c et les longueurs b' et b''. Voici une application que j'ai faite de cette seconde méthode à la détermination de la hauteur, au-dessus de la mer, du lac de Ninfa, d'où le fleuve du même nom tire ses eaux. Les ni-

vellements, faits avant moi, ne s'étaient pas étendus jusqu'à ce lac distant de la mer d'environ 47000 mètres.

M^r Scaccia, ci-dessus mentionné, a mesuré une base de 240 mètres, divisée comme la précédente, en trois parties de 80 mètres chacune; le signal le plus près du lac était numéroté 1, et les autres 2, 3 et 4, la progression des numéros suivant celle des distances. Les observations ont été faites, comme celles du pont des *Due Luci* du haut de la tour de *Sermonetta*. Voici les données.

$$\begin{array}{l} \text{angle entre les centres} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ et } 3 \dots c' = 20^{\circ} 4' 34'' \\ \text{des mires, } N'' \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ et } 4 \dots c'' = 1^{\circ} 2' 1'' \end{array} \right. \\ \hline c = 3^{\circ} 6' 35'' \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{distances entre les centres} \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ et } 3 \dots b' = 160^{\text{mètres}} \\ \text{des mires} \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ et } 4 \dots b'' = 80 \end{array} \right. \\ \hline b = 240^{\text{mètres}} \end{array} \right.$$

Les formules de l'art. cité sont

$$n = \frac{b''}{b'} \frac{\sin. c'}{\sin. c''}; \quad m = \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos. c}; \quad r' = \frac{b}{m};$$

(41)

et on a

log. sin. $c' = 2,5590329$	$2 \log. n = 0,0035838$
log. $b'' = 1,9030900$	$n^2 = 1,0082861$
compt. log. sin. $c'' = 1,7437890$	$r + n^2 = 2,0082861$
compt. log. $b' = 3,7958800$	$2 n \cos. c = 2,0053116$
log. $n = 0,0017919$	$m^2 = 0,0029745$
log. cos. $c = 1,9993600$	log. $m^2 = 3,4734140$
log. $2 = 0,3010300$	log. $b = 2,3802112$
log. $2 n \cos. c = 0,3021819$	log. $m = 2,7367070$
$2 n \cos. c = 2,0053116$	log. $r' = 3,6435042$

$$r' = 4400^m, 52.$$

(45) Voici une application des formules de l'art. 30 à la détermination de la hauteur de la Ninfa, au pont del Viale, situé à 3000^m du lac et à 44000^m de la mer, en suivant la direction du fleuve.

On a vu, c et n ayant la même signification qu'à l'art. 29, qu'il fallait d'abord calculer l'angle ψ par la formule

$$\text{tang. } \psi = \frac{1 + n^2}{2 n \cos. c}$$

et ensuite la quantité m , par l'équation

$$m = \sqrt{(1 + n^2 + 2 n \cos. c) \text{ tang. } (\psi - \frac{1}{4}\pi)}$$

et enfin les distances.

$$r' = \frac{b}{m}; r'' = \frac{\sin. c}{m \sin. c''}; b''; r''' = \frac{n}{m} b$$

les données sont

$$\begin{array}{l|l} c' = 2^\circ 42' 9'' & b' = 124^m \\ c'' = 1^\circ 20' 59'' & b'' = 62 \\ c = 4^\circ 3' 8'' & b = 186^m \end{array}$$

effectuant le calcul, d'après ces données, on a

$\log. b'' = 1,7923917$	$\log. b' = 2,0934217$
$\log. \sin. c' = 2,6734820$	$\log. \sin. c'' = 2,3720816$
$\log. b'' \sin. c' = 0,4658737$	$\log. b' \sin. c'' = 0,4655033$
$\log. b' \sin. c'' = 0,4655033$	$\log. n' = 0,0007408$
$\log. \left(\frac{b'' \sin. c'}{b' \sin. c''} \right) = 1, n = 0,0003704$	$n'' = 1,0017072$
$\log. 2 = 0,3010300$	$2 n \cos. c = 1,9967022$
$\log. \cos. c = 1,9989129$	$1 + n'' + 2 n \cos. c = 3,9984041$
$\log. 2 n \cos. c = 0,3003133$	$\log. 1 + n' = 0,3014011$
	$\log. 2 n \cos. c = 8,3003133$
	$\log. \tan. \psi = 0,0010878$

$$\psi = 45^{\circ} 4' 18'' \frac{13}{41} ; \psi - \frac{1}{2} \pi = 0^{\circ} 4' 18'' \frac{14}{41} = \frac{111,88}{41}$$

on peut calculer $\tan. (\psi - \frac{1}{2} \pi)$ par la méthode de l'article (40) et on aura

$$\begin{aligned} \log. \left(\frac{111,88}{41} \right) &= 2,4121674 && \left. \begin{array}{l} \text{On voit qu'on a,} \\ \text{mais on néglige le} \\ \log. \cos. \psi, \text{ ce qu'il} \\ \text{faudra toujours faire} \\ \text{lorsque l'angle n'ex-} \\ \text{cède pas 4 ou 5} \\ \text{minutes.} \end{array} \right\} \\ \frac{1}{2} \text{ compt. } \log. \cos. (0^{\circ} 4' 18'' \frac{14}{41}) &= 0,0000002 \\ \text{compt. } \log. R'' \dots &= 6,6855749 \\ \log. \tan. (\psi - \frac{1}{2} \pi) &= 3,0977425 \\ \log. (1 + n' + 2 n \cos. c) &= 0,6018873 \\ \log. m'' \dots &= 3,6996298 \\ \log. m \dots &= 2,8498149 \\ \log. b \dots &= 2,2695129 \\ \log. \frac{b}{m} = \log. r'' &= 3,4196980 \\ r'' &= 2628,5. \end{aligned}$$

(46) Le dernier exemple que je vais donner du calcul des distances horizontales, d'après les formules des art. 31 et 32,

se rapporte à une opération qui a exigé la plus grande précision dans la mesure des angles ; il s'agissait de déduire une longueur de plus de 5650 mètres de l'observation de deux segments de base dont le plus grand n'avait qu'environ 23 mètres. Cette base était tracée contre le mur du couvent de *Tor tre ponti* et j'observais les angles du haut de Tour de Sermonetta ;

Voici les données.

$$\begin{array}{lcl} d' = 0^{\circ} 15' 29'' ,4 = 929'' ,4 & b' = 25'' ,92 \\ c' = 0^{\circ} 12' 32'' ,0 = 752'' ,0 & b'' = 20'' ,94 \\ c = 0^{\circ} 28' 1'' ,4 = 1681'' ,4 & b = 46'' ,86 \end{array}$$

D'après ce qui est prescrit à l'art. 32, on doit déterminer
1° une quantité f par l'équation $f = \frac{\text{tang. } c'}{\text{tang. } c} b$; 2° un angle γ
par l'équation $\text{tang. } \gamma = \frac{b' - f}{b'' \text{ tang. } c'}$, et faisant $\gamma'' = c - \gamma$, on a,
art. 31, $r' = \frac{b \cos. \gamma''}{\sin. c}$.

Il faut donc avoir les logarithmes de $\text{tang. } c'$, $\sin. c$ et $\text{tang. } c$; et, vu la petitesse des angles, on aura recours aux règles de l'art. 40. Voici le calcul.

log. tang. c'	log. tang. c	log. sin. c
log. 929,4 = 2,9682027	log. 1681,4 = 3,2256710	log. 1681,4 = 3,2256710
compt. ($\frac{1}{2}$ log. cos. c') = 0,0000029	compt. ($\frac{1}{2}$ log. cos. c) = 0,0000096	$\frac{1}{2}$ log. cos. c = 1,9999952
compt. log. R'' = 0,6855749	compt. log. R'' = 0,6855749	compt. log. R'' = 0,6855749
log. tang. $c' = 3,6537805$	log. tang. $c = 3,9112555$	log. sin. $c = 3,9112411$

calcul de $b' - f$	calcul de $c - \gamma' = \gamma''$
log. tang. $c' = 3,6537805$	log. $(b' - f) = 2,2638017$
log. $b' = 1,6708023$	compt. log. $b'' = 2,6790233$
compt. log. tang. $c = 2,0887445$	comp. log. tang. $c' = 2,3462195$
log. $f = 1,4133273$	log. tang. $\gamma' = 1,2890445$
$f = 25,901643$	$\gamma' = 11^{\circ} 0' 35''$
$b' - f = 0,018357$	$\gamma'' = c - \gamma' = -(10^{\circ} 32' 34'')$

calcul de r'

$$\begin{array}{l}
 \log. b = 1,6708023 \\
 \log. \cos. \gamma'' = 1,9926059 \\
 \text{compt. log. sin. } c = 2,0887589
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Observez que cos. } \gamma' \\ \text{est positif quoique l'arc} \\ \text{soit négatif.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \log. r' = 3,7521671 \\
 r' = 5651,5
 \end{array}$$

(47) Je vais donner un exemple du calcul de la différence de niveau entre le centre de l'instrument, à la station de l'observateur, et le centre d'une mire, la distance horizontale, ou inclinée, entre les deux centres étant déterminée, cet exemple sera pris de l'opération du pont des *Due Luci*, qui a donné, art. 43, une distance, désignée par r' , de $5492^{\text{m}},75$ (log. = 3,7397909) entre la station et le signal n° 1. l'angle de dépression a été trouvé, valeur moyenne déduite d'une série d'observations, égal à $2^{\circ} 36' 7'' = \gamma$; et z étant la différence de niveau cherchée, on a dans la formule de l'art. 24,

$$\begin{array}{l}
 A' = r' = 5492^{\text{m}},75 ; \log. r' = 3,7397909 \\
 \varphi = 2^{\circ} 36' 7''
 \end{array}$$

le produit $0,013608 r'$, qui exprime, en secondes sexagésimales, la correction à faire à φ , eu égard à la réfraction, doit être pris négativement, art. 23, parce que le point observé est inférieur à la station de l'observateur. Calculant d'abord cette correction, on a

$$\begin{aligned}\log. r' &= 3,7397909 \\ \log. 0,013608 &= 2,1337950 \\ \log. 0,013608 r' &= 1,8735859 = \log. 74,75\end{aligned}$$

on a ainsi,

$$\begin{aligned}\text{angle } \varphi, \text{ observé, } & \dots\dots\dots 2^{\circ} 36' 7'' 00 \\ \text{angle de correction} &= 74'' 75 = -0' 14,75 \\ \text{angle } \varphi - 0,013608 r' &= 2^{\circ} 34' 52'', 25 \\ \log. r' &= \dots\dots\dots 3,7397909 \\ \log. \sin. 2^{\circ} 34' 52'', 25 &= 2,6535486 \\ \log. z &= 2,3933395 \\ z &= 247^{\circ}, 3657\end{aligned}$$

(48) Pour calculer z par la formule de l'art. 23, dans laquelle A exprime la distance r' réduite à l'horizon, il faudrait substituer à A' , ou r' , le produit $r' \cos. \varphi$, et, pour évaluer ce produit, il sera plus que suffisant de n'employer φ qu'avec les dixaines de secondes les plus approchées, en négligeant les unités et les fractions d'unités; on a ainsi,

$$\begin{aligned}\log. r' &= 3,7397909 \\ \log. \cos. \varphi &= \log. \cos. 2^{\circ} 36' 10'' = 1,9995517 \\ \log. A &= 3,7393426 \\ \log. 0,03608 &= 2,1337950 \\ \log. 0,03608 A &= 1,8731376 = \log. 74,67\end{aligned}$$

on a ainsi,

$$\begin{aligned}
 \text{angle observé} &= 2^{\circ} 36' 7'',00 \\
 \text{angle de correction} &= 0 \quad 1 \quad 14,67 \\
 \text{angle } \varphi - 0,013608 A &= 2^{\circ} 34' 52'',33 \\
 \log. A &= 3,7393427 \\
 \log. \text{ tang. } 2^{\circ} 34' 52'',33 &= 2,6539936 \\
 \log. z &= 2,3933363 \\
 z &= 247^{\circ} 3639
 \end{aligned}$$

La différence entre ce résultat et celui de l'article précédent n'est pas de deux millimètres, elle doit être absolument comptée pour rien, et on peut prendre $247^{\circ} 37$ pour la différence de niveau vraie.

(49) Je terminerai ces exemples par une application de la formule de l'art. 25, qui donne la hauteur du centre de l'instrument au-dessus du niveau de la mer. La station étant au haut de la tour de Sermonetta, j'ai trouvé, valeur moyenne déduite de plusieurs séries, $\omega = 0^{\circ} 29' 53'',98$, qu'on peut prendre pour $0^{\circ} 29' 54''$.

Calculant d'après cette donnée, la hauteur z du centre de l'instrument au-dessus du niveau de la mer pour la formule de l'article cité,

$$\log. Z = 2 \log. \text{ tang. } \omega + 6,5696969$$

on a

$$\begin{aligned}
 \log. \text{ tang. } \omega &= 3,9394083 \\
 2 \log. &= 5,8788166 \\
 \log. \text{ constant } &6,5696969 \\
 \log. Z \dots &= 2,4485135 \\
 Z &= 280^{\circ} 387 \dots \quad 280^{\circ},87.
 \end{aligned}$$

Report... 280^m,87

Retranchant de cette hauteur la différence de niveau, trouvée dans les deux articles précédents, entre le centre de l'instrument et le disque... 247,37

On a pour la hauteur du centre du disque au-dessus de la mer, 33^m,50

M. Scaccia a mesuré la différence de niveau entre le centre du disque et le fond de la Tepia, sous le pont des Due Luci qui s'est trouvé de.. 4,32

Et on a, pour l'élevation de ce fond, au-dessus de la mer, 29^m,18

C'est la hauteur que j'ai employée dans mon ouvrage sur les Marais Pontins, et qui détermine une des côtes de fond, du canal destiné à écouler les eaux appelées *supérieures*; elle diffère peu du résultat des nivellements faits avec des peines et des soins infinis, par les ingénieurs *Vici* et *Pas-saga*; pour bien apprécier leur constance et leur zèle, il faut considérer d'une part que le pont des Due Luci est à une distance de la mer de plus de 21000 mètres, et que la série des points nivelés se trouve sur un développement encore plus long, d'une autre part que ces ingénieurs ont opéré avec des instruments, ou perpendicules, dans le genre du niveau d'Huighens, instruments qui rendent la précision beaucoup plus difficile que les niveaux à bulle d'air.

FIN.

679607
FBN







